# 堆

## 概述

## 分类

### 二叉堆

### d-堆

d-堆是二叉堆的简单推广，它恰像一个二叉堆，只是所有节点都有d个儿子（因此，二叉堆是2-堆）。

### 左式堆

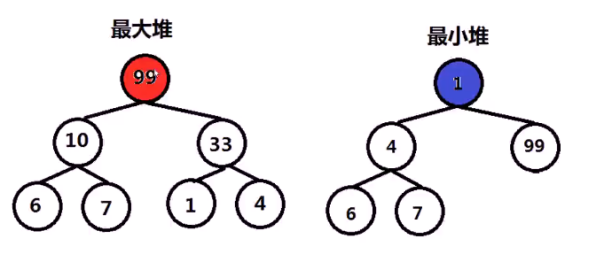
### 斜堆

### 二项队列

## 二叉堆/完全二叉树

### 概述

最（大）小二叉堆，最（大）小值先出的完全二叉树。



注：最大堆的左子树、右子树都满足最大堆的定义，最小堆同理。

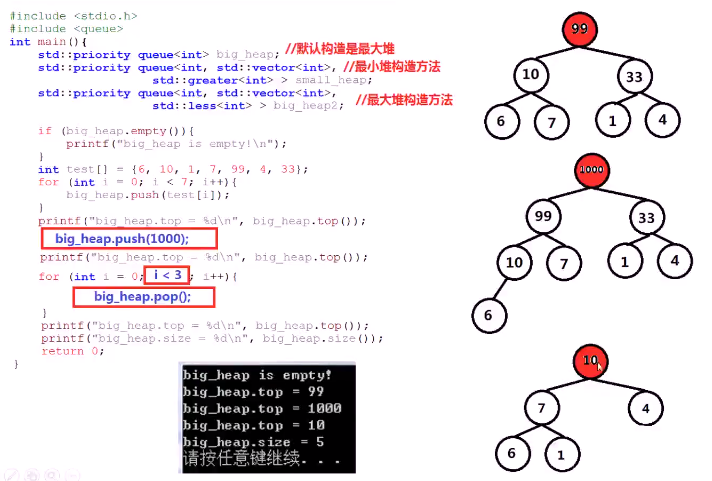
### 表示

### 创建

### 操作

#### 查询

#### 插入



注：掌握最大/小堆的构造。

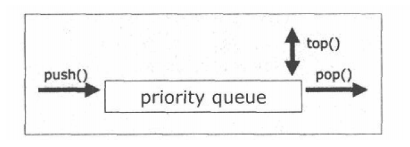
#### 删除

#### 销毁

# 优先队列

## 概述

优先队列priority\_queue其实就一个特殊的queue，其中的元素根据优先级被读取。它的接口和queue非常相近，也就是说，push()对着queue置入一个元素，top()/pop()存取/移除下一个元素，然而所谓的“下一个元素”并非第一个置入的元素，而是“优先级最高”的元素。换言之，priority\_queue内的元素已经根据其值进行了排序。



## 实现

优先队列的实现方法包括：

1、无序数组实现

2、无序链表实现

我们可以使用一个简单链表在表头以O(1)执行插入操作，并遍历该链表以删除最小元素，这又需要O(N)时间。另一种方法是，始终让表保持排序状态，这使得插入代价高昂O(N)，而DeleteMin花费低廉O(1)。

1、有序数组实现

2、有序链表实现

3、二叉搜索树实现

二叉查找树对插入和删除操作的平均运行时间都是O(logN)，尽管插入时随机的，而删除则不是。反复除去左子树中的节点似乎损害树的平衡，使得右子树加重。然而，右子树是随机的。在最坏的情形，即DeleteMin将左子树删空的情况下，左子树拥有的元素最多也就是它应具有的两倍。注意，通过使用平衡树，可以把界变成最坏情形的界，这将防止出现坏的插入序列。

1、平衡二叉树实现

2、二叉堆实现

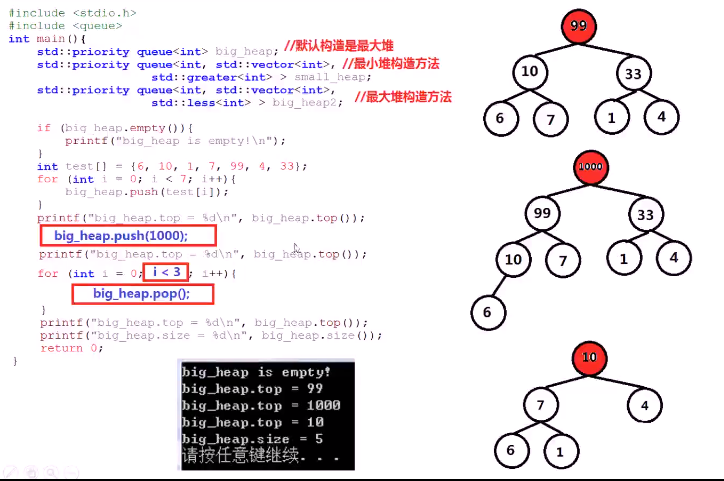
区别：

平衡二叉树（Balanced Binary Tree）是一种特殊的二叉树，它满足任意节点的左右子树高度差不超过1，且左右子树也都是平衡二叉树。平衡二叉树的一个重要应用是作为底层数据结构来实现平衡搜索树（如 AVL 树和红黑树），以保证在插入、删除等操作后树的高度始终保持在对数级别，从而保证检索效率。

二叉堆是一种完全二叉树，即除了最底层，其他层的节点都是满的，并且最底层的节点都集中在左侧。在二叉堆中，每个节点的值都必须大于等于（最大堆）或小于等于（最小堆）其子节点的值。

**二叉堆常用于实现优先队列（Priority Queue），因为它能够快速找到最大或最小值，并且在插入和删除操作中能够保持堆的性质**。

二叉堆实现：



**复杂度分析：**

时间复杂度：nlogk

空间复杂度：k

## 定义

升序队列：

priority\_queue <int,vector<int>,greater<int> > q;

降序队列：

priority\_queue <int,vector<int>,less<int> >q;

注：greater和less是std实现的两个仿函数（就是使一个类的使用看上去像一个函数。其实现就是类中实现一个operator()，这个类就有了类似函数的行为，就是一个仿函数类了）

### 基本类型

对于基础类型默认是大顶堆：

priority\_queue<int> a;

注：等同于 priority\_queue<int, vector<int>, less<int> > a;

这里一定要有空格，不然成了右移运算符。

小顶堆：

priority\_queue<int, vector<int>, greater<int> > c;

### pair优先队列元素

#include <iostream>

#include <queue>

#include <vector>

using namespace std;

int main()

{

priority\_queue<pair<int, int> > a;

pair<int, int> b(1, 2);

pair<int, int> c(1, 3);

pair<int, int> d(2, 5);

a.push(d);

a.push(c);

a.push(b);

while (!a.empty())

{

cout << a.top().first << ' ' << a.top().second << '\n';

a.pop();

}

}

### 自定义类型优先队列元素

#include <iostream>

#include <queue>

using namespace std;

//方法1

struct tmp1 //运算符重载<

{

int x;

tmp1(int a) {x = a;}

bool operator<(const tmp1& a) const

{

return x < a.x; //大顶堆

}

};

//方法2

struct tmp2 //重写仿函数

{

bool operator() (tmp1 a, tmp1 b)

{

return a.x < b.x; //大顶堆

}

};

int main()

{

tmp1 a(1);

tmp1 b(2);

tmp1 c(3);

priority\_queue<tmp1> d;

d.push(b);

d.push(c);

d.push(a);

while (!d.empty())

{

cout << d.top().x << '\n';

d.pop();

}

cout << endl;

priority\_queue<tmp1, vector<tmp1>, tmp2> f;

f.push(b);

f.push(c);

f.push(a);

while (!f.empty())

{

cout << f.top().x << '\n';

f.pop();

}

}

## 接口

优先队列priority\_queue的核心接口主要由成员函数push()、top()、pop()组成：

push()会将一个元素置入priority\_queue中；

top()会返回priority\_queue中的“下一个元素”

pop()会从priority\_queue中移除一个元素

## 应用

优先队列应用如下：

压缩数据：霍尔曼编码算法

查找最短路径：Dijkstra算法

计算最小生成树：Prim树

编写选择算法：寻找第k小的元素。

凡是涉及第k个最值问题，通常可以考虑最大/小堆的实现方式。

### 最小的k个数

**题目：**

输入整数数组arr，找出其中最小的k个数。例如，输入4、5、1、6、2、7、3、8这8个数字，则最小的4个数字是1、2、3、4。

示例 1：

输入：arr = [3,2,1], k = 2

输出：[1,2] 或者 [2,1]

示例 2：

输入：arr = [0,1,2,1], k = 1

输出：[0]

限制：

0 <= k <= arr.length <= 10000

0 <= arr[i]<= 10000

注：LeetCode 面试题 17.14. 最小K个数

**分析：**

**方法一：排序**

对原数组从小到大排序后取出前k个数即可。

class Solution {

public:

vector<int> getLeastNumbers(vector<int>& arr, int k) {

vector<int> vec(k, 0);

sort(arr.begin(), arr.end());

for (int i = 0; i < k; ++i) vec[i] = arr[i];

return vec;

}

};

**方法二：堆**

我们用一个大根堆实时维护数组的前k小值。首先将前k个数插入大根堆中，随后从第k+1个数开始遍历，如果当前遍历到的数比大根堆的堆顶的数要小，就把堆顶的数弹出，再插入当前遍历到的数。最后将大根堆里的数存入数组返回即可。

**C++语言中的堆（即优先队列）为大根堆**。

**代码：**

class Solution {

public:

vector<int> smallestK(vector<int>& arr, int k) {

vector<int> ret;

if (arr.empty() || k == 0) return ret;

priority\_queue<int, vector<int>, less<int>> pri\_que;

for (int i = 0; i < arr.size(); i++) {

pri\_que.push(arr[i]);

if (i >= k) {

pri\_que.pop();

}

}

while (pri\_que.size()) {

ret.push\_back(pri\_que.top());

pri\_que.pop();

}

return ret;

}

};

或：

class Solution {

public:

vector<int> getLeastNumbers(vector<int>& arr, int k) {

vector<int>vec;

if(0 == k) //特殊情况：排除k=0的情况

return vec;

std::priority\_queue<int> queue;

//使用默认的堆，大根堆即可

for(size\_t i=0;i<arr.size();i++){

if(queue.size() < k)

{

queue.push(arr.at(i));

}else{

if(queue.top() > arr.at(i))

{

queue.pop();

queue.push(arr.at(i));

}

}

}

for(size\_t i=0;i<k;++i)

{

vec.push\_back(queue.top());

queue.pop();

}

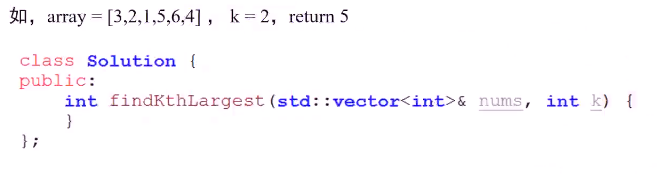
return vec;

}

};

### 数组中第K大的数

**题目：**已知一个未排序的数组，求这个数组中第K大的数字。



注：Leetcode 215

**分析：**

可以采用的方法：对数组进行排序，然后返回第k个数字，这样时间复杂度为O(NlogN)，但是这样不是最优解。

可以采用堆的思想：

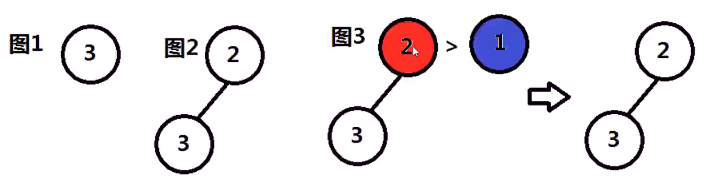
维护一个**K大小**的最小堆，堆中元素个数小于K时，新元素直接进入堆；否则，当堆顶小于新元素时，弹出堆顶，将新元素加入堆。

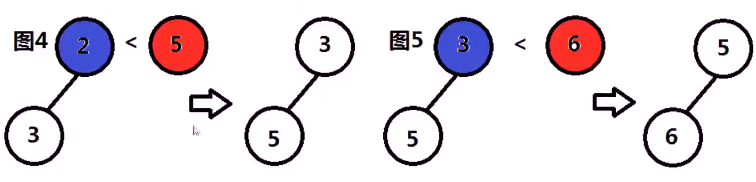
由于堆是最小堆，堆顶是堆中最小元素，新元素都会保证比堆顶小（否则新元素替换堆顶），故堆中K个元素是已扫描的元素里最大的K个；堆顶即为第K大的数。

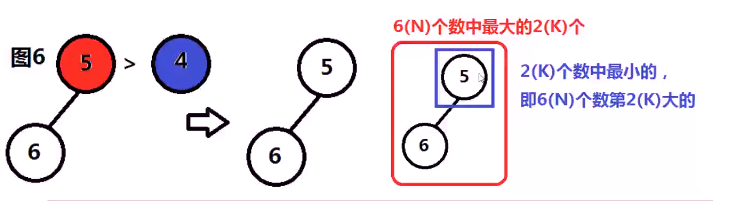
注：这里只需要维护一个k大小的堆即可，不需要将全部数据都存入到最小堆中。

设数组长度为N，求第K大的数，时间复杂度：N\*logK。

如array=[3,2,1,5,6,4]：







**代码：**



注：掌握最小堆的构建方式，即priority\_queue<>

class Solution {

public:

int findKthLargest(vector<int>& nums, int k) {

priority\_queue<int, vector<int>, greater<int>> pri\_que;

for (int i = 0; i < nums.size(); i++) {

pri\_que.push(nums[i]);

if (i >= k) { // priority\_queue.size() > k

pri\_que.pop();

}

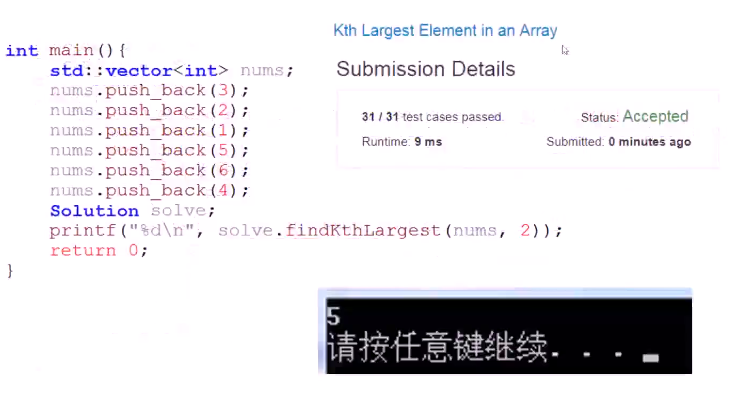
}

return pri\_que.top();

}

};

**测试：**



### 找出数组中的第 K 大整数

注：LeetCode 1985

分析：

使用最小堆实现，但是因为入参是string类型，这里需要自己编写仿函数或者函数表达式。

### 数据流中的第 K 大元素

设计一个找到数据流中第 k 大元素的类（class）。注意是排序后的第 k 大元素，不是第 k 个不同的元素。

请实现 KthLargest 类：

KthLargest(int k, int[] nums) 使用整数 k 和整数流 nums 初始化对象。

int add(int val) 将 val 插入数据流 nums 后，返回当前数据流中第 k 大的元素。

注：LeetCode 703

### 第 k 个数

有些数的素因子只有 3，5，7，请设计一个算法找出第 k 个数。注意，不是必须有这些素因子，而是必须不包含其他的素因子。例如，前几个数按顺序应该是 1，3，5，7，9，15，21。

注：面试题17.09

### 数组中两元素的最大乘积

给你一个整数数组 nums，请你选择数组的两个不同下标 i 和 j，使 (nums[i]-1)\*(nums[j]-1) 取得最大值。

请你计算并返回该式的最大值。

注：LeetCode 1464

分析：

可以采用排序，一次遍历或者优先队列实现（其实就是最大的2个数）。

这里求解最大K、第K、最大乘积、最大和的问题，其实都是TopK问题。

### 前K个高频单词

**题目：**

给一非空的单词列表，返回前 k 个出现次数最多的单词。

返回的答案应该按单词出现频率由高到低排序。如果不同的单词有相同出现频率，按字母顺序排序。

说明：LeetCode 347

**示例 1：**

输入: ["i", "love", "leetcode", "i", "love", "coding"], k = 2

输出: ["i", "love"]

解析: "i" 和 "love" 为出现次数最多的两个单词，均为2次。

注意，按字母顺序 "i" 在 "love" 之前。

**示例 2：**

输入: ["the", "day", "is", "sunny", "the", "the", "the", "sunny", "is", "is"], k = 4

输出: ["the", "is", "sunny", "day"]

解析: "the", "is", "sunny" 和 "day" 是出现次数最多的四个单词，

出现次数依次为 4, 3, 2 和 1 次。

**注意：**

假定 k 总为有效值， 1 ≤ k ≤ 集合元素数。

输入的单词均由小写字母组成。

**分析：**

有两种基本的思路：

1、排序

计算每个单词的频率，并使用使用这些频率的自定义排序关系对单词进行排序。然后取前k。

2、堆

计算每个单词的频率，然后将其添加到存储到大小为k的小根堆中。它将频率最小的候选项放在堆的顶部。最后，我们从堆中弹出最多k次，并反转结果，就可以得到前k个高频单词。

在构造优先队列/堆的时候，可以采用如下的方法：

1、静态函数

static bool compare(std::pair<string,int> &p1, std::pair<string,int> &p2){

if(p1.second == p2.second)

return p1.first > p2.first;

return p1.second < p2.second;

}

std::priority\_queue<std::pair<string,int>,std::vector<std::pair<string,int> >, compare> queue;

2、仿函数：重载运算符

struct compare{

bool operator() (std::pair<string,int> &p1, std::pair<string,int> &p2){

if(p1.second == p2.second)

return p1.first > p2.first;

return p1.second < p2.second;

}

};

3、Lambda表达式

注：这种其实就是第k大/小元素的变式，只不过原来构造优先队列的时候只需要存储节点数值和比较大小即可，现在需要存储pair，且比较函数需要自行编写。

**代码：**

class Solution {

public:

    vector<string> topKFrequent(vector<string>& words, int k) {

        struct compare{

            bool operator() (std::pair<string,int> &p1, std::pair<string,int> &p2){

            if(p1.second == p2.second)

                return p1.first > p2.first;

            return p1.second < p2.second;

            }

        };

        std::priority\_queue<std::pair<string,int>,std::vector<std::pair<string,int> >, compare> queue;

        unordered\_map<string,int> mp;

        for(auto w : words)

            mp[w]++; //对应字符的个数+1

/\*这是采用C++11的auto遍历，或采用传统的迭代器方式赋值：

for(int i = 0;i<words.size();i++){

mp[words[i]]++;

}

\*/

        for(auto m: mp)

            queue.push(make\_pair(m.first,m.second));

/\*

for(auto it = mp.begin();it != mp.end();it++){

queue.push({it->first,it->second});

}

\*/

        std::vector<string> s;

        while(k--){

            s.push\_back(queue.top().first);

            queue.pop();

        }

        return s;

    }

};

### 根据字符出现频率排序

给定一个字符串 s ，根据字符出现的 频率 对其进行 降序排序 。一个字符出现的 频率 是它出现在字符串中的次数。

返回 已排序的字符串 。如果有多个答案，返回其中任何一个。

注：LeetCode 451

### 丑数II

给你一个整数 n ，请你找出并返回第 n 个 丑数 。

丑数 就是质因子只包含 2、3 和 5 的正整数。

注：LeetCode 264

分析：这里是求第N个丑数，其实就是第K值的问题，只是这里是满足某种特性的第K值。

### 最接近原点的 K 个点

### 查找和最小的K对数字

给定两个以升序排列的整形数组 nums1 和 nums2, 以及一个整数 k。

定义一对值(u,v)，其中第一个元素来自 nums1，第二个元素来自 nums2。

找到和最小的 k 对数字 (u1,v1), (u2,v2) ... (uk,vk)。

注：LeetCode 373

注：优先队列。

### 寻找中位数

题目：设计一个数据结构，该数据结构动态维护一组数据，且支持以下操作：

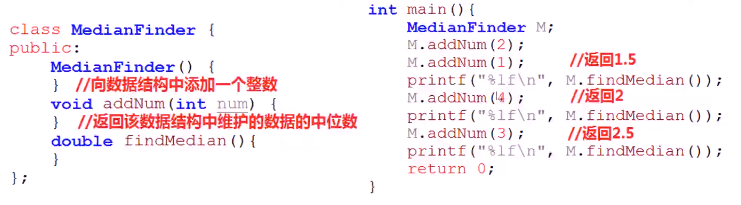
1、添加元素：void addNum(int num)，将整数num添加至数据结构中；

2、返回数据的中位数：double findMedian()，返回其维护的数据的中位数。

中位数的定义：

1、若数据个数为奇数，中位数是该组数排序后中间的数。[1,2,3]🡪2

2、若数据个数为偶数，中位数是该组数排序后中间的两个数字的平均值。[1,2,3,4]🡪2.5



注：Leetcode 295

**分析：**

最直观的方法：

存储结构使用数组，每次添加元素或查找中位数时对数组排序，再计算结果。

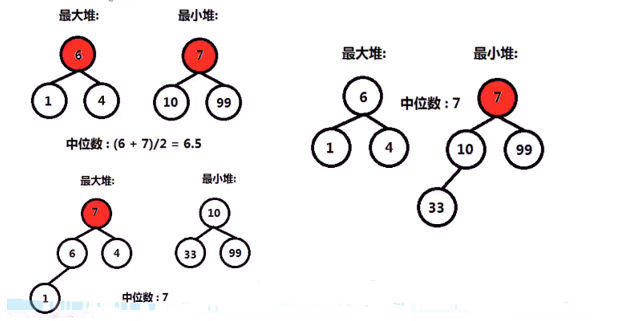
时间复杂度：

1、若添加元素时排序，addNum复杂度O(n)，findMedian复杂度O(1)

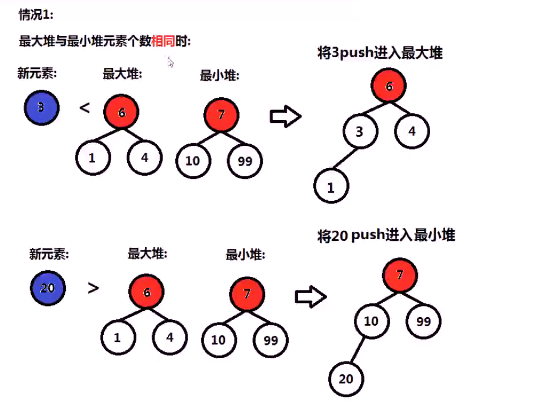
2、若查询中位数时排序，addNum复杂度O(1)，findMedian复杂度O(nlogn)

若添加元素或查询中位数是随机的操作，共n次操作，按照上述思想，整体复杂度最佳为O(n^2)。

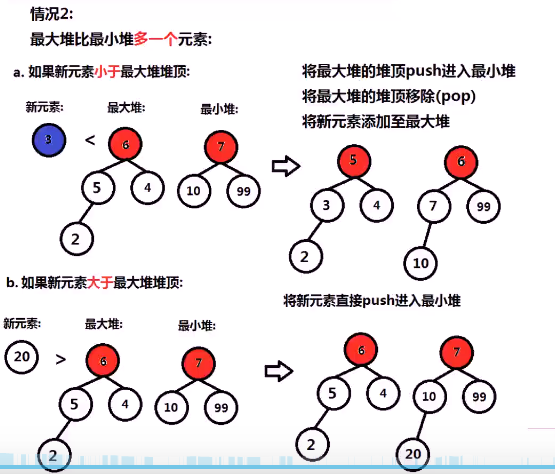
除了上述方法，还可以动态维护一个最大堆和一个最小堆，最大堆存储一半数据，最小堆存储一般数据，维持最大堆的堆顶比最小堆的堆顶小。



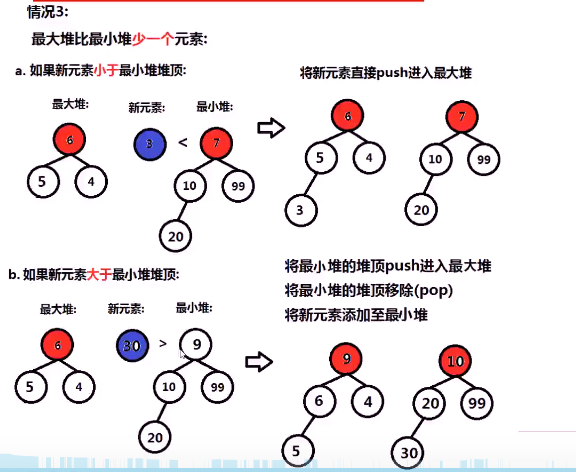
情况1：最大堆与最小堆元素个数相同时：

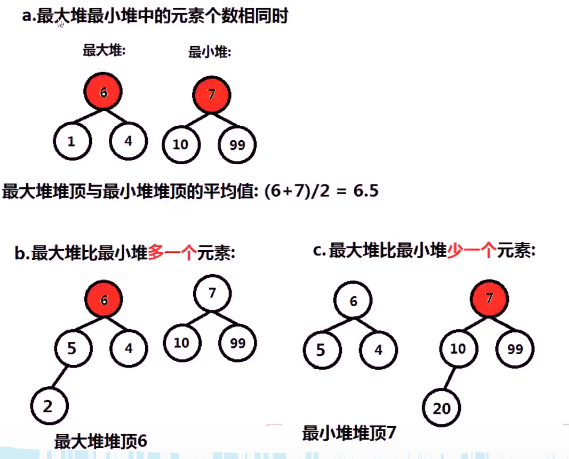


情况2：最大堆比最小堆多一个元素：

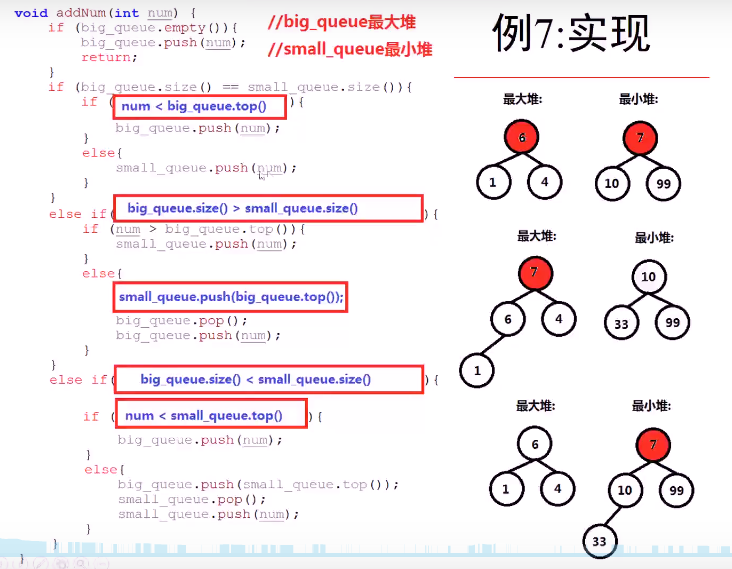


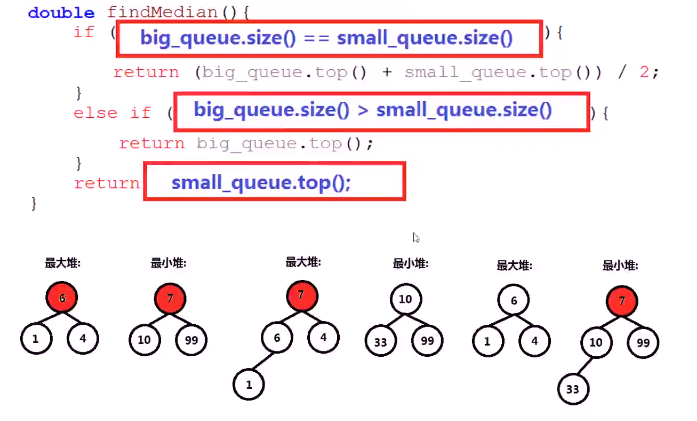
情况3：最大堆比最小堆少一个元素





**代码：**





### 合并 K 个升序链表

给你一个链表数组，每个链表都已经按升序排列。

请你将所有链表合并到一个升序链表中，返回合并后的链表。

注：LeetCode 23

分析：

可以采用两种方式实现：

1. 从第1个开始，两两链表合并，最终实现K个链表的合并
2. 使用优先队列，将链表全部都存到堆中排好序，然后再从堆中逐一取出来，更新新的链表（取出来的时候就已经是按照顺序了）。

### 滑动窗口最大值

给你一个整数数组 nums，有一个大小为 k 的滑动窗口从数组的最左侧移动到数组的最右侧。你只可以看到在滑动窗口内的 k 个数字。滑动窗口每次只向右移动一位。

返回 滑动窗口中的最大值 。

注：LeetCode 239（困难）

类似题目：LCR 183. 望远镜中最高的海拔

分析：

这个完全符合双端队列的特性，即不断向右侧移动，左侧不断移除。

## 类似题目

### 找到 K 个最接近的元素

给定一个 排序好 的数组 arr ，两个整数 k 和 x ，从数组中找到最靠近 x（两数之差最小）的 k 个数。返回的结果必须要是按升序排好的。

整数 a 比整数 b 更接近 x 需要满足：

|a - x| < |b - x| 或者

|a - x| == |b - x| 且 a < b

注：LeetCode 658

分析：这个可以用双指针，从左右两边“夹逼”，这种与第K个值不太一样。